ある種の多重特性的な擬微分方程式系の解の構造 : 正則性の伝播と解析的準楕円性(偏微分方程式の解の構造の研究)

大阿久, 俊則

数理解析研究所講究録
529巻 1984年 21-36

ある種の多重特性的な擬微分方程式系の解の構造
—— 正則性の伝播と解析的準楕円性 ——

東京大学理学部　大阿久　俊則

序. 次のような作用素を考える:

$$P = P_1 P_2 I_m + Q;$$

ここで, P_1, P_2 は $\sqrt{-1}\,T^*\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^n$ の点 x^* の近傍で定義された, それぞれ ℓ_1, ℓ_2 階の解析的擬微分作用素, $Q = (Q_{ij})$ は x^* の近傍で定義された高々 $\ell_1 + \ell_2 - 1$ 階の解析的擬微分作用素を成分とする $m \times m$ 行列, I_m は m 次単位行列である. 我々は, P_1 と P_2 の Poisson 括弧式が 0 でないと仮定して, 擬微分方程式系 $Pu = 0$ のマイクロ函数解の (台の) 構造を調べる. これは, P が偏微分作用素 (の行列) の場合には, 偏微分方程式系 $Pu = f$ の佐藤超函数解 u の特異スペクトル (解析的波面集合) を調べることに相当する.

我々の扱う作用素の最も典型的な例は,

(1)　　$D_1^2 - x_1^2(D_2^2 + \cdots + D_n^2) + $ (低階項)

及び

(2) $D_1^2 + x_1^2(D_2^2 + \cdots + D_n^2)$ + (低階項)

という作用素である; ここで, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $D_j = \partial/\partial x_j$ とおいた. (1)については解の(C^∞-)特異性の分岐が, Ivrii [4], Alinhac [1], Hanges [3] 等により, また(2)については解析的準楕円性が, Grušin [2], 柏原-河合-大島 [6], Treves [16] 等により調べられている. いずれの場合にも, 低階項が本質的な影響を及ぼす. 本稿では, これらの現象を解析的カテゴリーで超局所解析の立場から考察する.

§1では, 方程式系 $\mathcal{P}u = 0$ は複素領域において,

$$(z_1 D_1 I_m - A)u = 0$$

(Aは高々0階の擬微分作用素の $m \times m$ 行列)という方程式系と同値になることを示す(Aの詳しい構造については, 定理1を参照).

§2では, これを用いて, P_1の主シンボルが実のときに, $\mathcal{P}u = 0$ のマイクロ函数解の零(佐藤超函数解のマイクロ解析性)の伝播を調べる. 特に, P_2の主シンボルも実の場合には, これから解の特異性の分岐に関する結果が得られる. 証明には, 片岡 [9, 10] による境界値問題の超局所理論を用いて, 解を, 正則パラメータを持つマイクロ函数に変換するという方法を使う.

§3では, P_1の実特性多様体がシンプレクティックである場

合に，$\mathcal{P}$ が超局所的な意味で解析的準楕円型となるための一つの十分条件を与える．証明には，適当な複素接触変換で $\mathcal{P}_1$ の主シンボルが実になるように $\mathcal{P}$ を変換するという方法を用いる．Schapira [15] による正値性の理論を用いると，この変換によって，解析的準楕円性の問題を，§2で扱われた正則性伝播の問題に帰着させることができる．§1の詳細及び特異性分岐については，近刊予定の [11] を，また §2 及び §3 の詳細については，[12] を参照されたい．

§1. 方程式系の標準形

x^* を $T^*\mathbb{C}^n - \mathbb{C}^n = \{(z,\zeta)\,;\, z \in \mathbb{C}^n,\ \zeta \in \mathbb{C}^n - \{0\}\}$ の点として，$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ を x^* の近傍で定義された佐藤-河合-柏原 [13] の意味での擬微分作用素で，次をみたすものとする；

(A.1) $\sigma(\mathcal{P}_1)(x^*) = \sigma(\mathcal{P}_2)(x^*) = 0$,

(A.2) $\{\sigma(\mathcal{P}_1),\ \sigma(\mathcal{P}_2)\}(x^*) \neq 0$.

ここに，σ は主シンボル，$\{\ ,\ \}$ は（$T^*\mathbb{C}^n$ における）Poisson 括弧式を表わす．$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ の階数をそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 として $\ell = \ell_1 + \ell_2$ とおき，$Q = (Q_{ij})$ を x^* の近傍で定義された高々 $(\ell-1)$ 階の擬微分作用素を成分とする $m \times m$ 行列とする．行列

$$\left(\sigma_{\ell-1}(Q_{ij})(x^*) / \{\sigma(\mathcal{P}_1),\ \sigma(\mathcal{P}_2)\}(x^*)\right)_{1 \leq i,j \leq m}$$

の固有値を，$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ で表わそう．

$\lambda \in \mathbb{C}$ に対し，

$$J(\lambda) = \{ j \in \{1, \cdots, m\} ;\ \lambda_j - \lambda \in \mathbb{Z} \},$$
$$J(0,1) = \{ j \in J(0) ;\ \lambda_j < 0 \},$$
$$J(0,2) = \{ j \in J(0) ;\ \lambda_j \geqq 0 \},$$
$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{C} ;\ -1 < \mathrm{Re}\,\lambda \leqq 0,\ J(\lambda) \neq \emptyset \}$$

とおき，$\lambda \in \Lambda$ に対して，

$$m(\lambda) = \# J(\lambda);$$

また，$0 \in \Lambda$ のとき，

$$m(0, i) = \# J(0, i) \quad (i = 1, 2)$$

とおく。条件 (A.1) 及び (A.2) のもとで，次のような $T^*\mathbb{C}^n$ の複素接触変換 φ が存在する；φ は x^* の近傍で定義され，$\varphi(x^*) = (0, dz_n)$ の近傍で，

$$\varphi(\{(z, \zeta) \in T^*\mathbb{C}^n ;\ \sigma(P_1)(z, \zeta) = 0\}) = \{(z, \zeta) ;\ z_1 = 0\},$$
$$\varphi(\{(z, \zeta) ;\ \sigma(P_2)(z, \zeta) = 0\}) = \{(z, \zeta) ;\ \zeta_1 = 0\}$$

が成立する．以下，$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$，$D = (D_1, \cdots, D_n)$，$D_j = \partial/\partial z_j$，$z' = (z_2, \cdots, z_n)$，$D' = (D_2, \cdots, D_n)$ という記号を用いる．さて，以上の仮定と記号のもとで，次の結果を得る．($P = P_1 P_2 I_m + Q$ とおく．)

<u>定理 1.</u> φ に付随した量子化接触変換 Φ が存在して，方程式系 $\Phi^{-1}(P)\Phi^{-1}(u) = 0$ は，方程式系

$$(z_1 D_1 I_m - A) v = 0$$

と同値；ここで，A は高々 0 階の擬微分作用素の $m\times m$ 行列で，$A=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ と直和分解され（A_λ は $m(\lambda)\times m(\lambda)$ 行列），各 A_λ は次をみたす：$\lambda\neq 0$ のとき，$A_\lambda=A_\lambda(z',D')$ と書け，$\sigma_0(A_\lambda)(0,dz_n)$ の固有値はすべて λ； $0\in\Lambda$ のとき，A_0 は

$$A_0=\begin{pmatrix} A_{11}(z',D') & A_{12}(z',D')D_1 \\ z_1A_{21}(z',D') & A_{22}(z',D') \end{pmatrix}$$

と書け（A_{ij} は $m(0,i)\times m(0,j)$ 行列），$\sigma_0(A_{11})(0,dz_n)$ の固有値はすべて -1，$\sigma_0(A_{22})(0,dz_n)$ の固有値はすべて 0.

$m=1$ の場合には，この定理は柏原－河合－大島 [6] による．我々の定理の証明には，柏原－大島 [7] の Theorem 3.2 の証明と類似の逐次近似法を用いる．詳細については [11] の §2 を参照．

§2. 正則性の伝播

$x^*\in\sqrt{-1}\,T^*\mathbb{R}^n-\mathbb{R}^n=\{(x,\sqrt{-1}\eta);\ x\in\mathbb{R}^n,\ \eta\in\mathbb{R}^n-\{0\}\}$ として，$P=P_1P_2I_m+Q$ は §1 と同様，P_1，P_2 は x^* において条件 (A.1) と (A.2) をみたしているとする．この節ではさらに，次の (A.3) と (R) を仮定する：

(A.3) $\lambda_j\notin\{0,1,2,\cdots\}$ $(j=1,\cdots,m)$，

(R) $\sigma(P_1)$ は $\sqrt{-1}\,T^*\mathbb{R}^n$ 上で実数値（または純虚数値）

をとる．

このとき，x^*を通るP_1の実陪特性帯$b_1(x^*)$が（x^*の近傍で）定義される．条件（A.1）～（A.3）及び（R）のもとで次の結果を得る．

定理2．uはx^*の近傍で定義されたm個のマイクロ函数からなる縦ベクトルで，$Pu = 0$をみたし，かつuの台は$b_1(x^*) - \{x^*\}$と交わらないものとする．このとき，uの台は$b_1(x^*)$と交わらない．

（証明の概略）定理1を用いると，実量子化接触変換により，Pを$x^* = (0, \sqrt{-1}dx_n)$の近傍で定義された

$$P = x_1(D_1 I_m - A(x, D')) - B(x', D')$$

という作用素に変換できることがわかる．ここで，A，Bはそれぞれ高々1階，高々0階の擬微分作用素の$m \times m$行列；$x' = (x_2, \cdots, x_n)$，$D' = (D_2, \cdots, D_n)$，$D_j = \partial/\partial x_j$とおいた．さらに，$\sigma_0(B)(0, \sqrt{-1}dx_n)$の固有値はすべて$\lambda$（$\neq 0, 1, 2, \cdots$）であると仮定してよい．

定理の仮定から，$Pu = 0$，かつuの台と

$$\{(0; \sqrt{-1}\eta_1, 0, \cdots, 0, \sqrt{-1}) \in \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^n;\ \eta_1 \in \mathbb{R}\}$$

との交わりは1点$(0, \sqrt{-1}dx_n)$である．このとき，Yを Heaviside函数として，$Y(x_1)u(x)$がマイクロ函数として，well-defined であり，さらに，

$$\mathcal{P}(Y(x_1)u(x)) = Y(x_1)\mathcal{P}u(x) + x_1\delta(x_1)u(x) = 0$$

が成立する．片岡 [9, 10] の理論により，層同型 β が存在して，$v(\zeta_1, x') = \beta(Y(x_1)u(x))$ は，$0 < \varepsilon \ll 1$ に対し，

$$\{(\zeta_1, x', \sqrt{-1}\eta')\ ;\ \zeta_1 \in \mathbb{C},\ |\zeta_1| > \varepsilon^{-1} \text{ or } \mathrm{Re}\,\zeta_1 > 0,$$
$$|x_i| < \varepsilon\ \ (2 \leqq i \leqq n),\quad |\eta_j| < \varepsilon\eta_n\ \ (2 \leqq j \leqq n-1),$$
$$\eta_n > 0\}$$

上定義された ζ_1 を正則パラメータとして持つマイクロ函数である．さらに，β は次の対応により量子化接触変換を定義する：

$$\begin{cases} \beta \circ \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right) \circ \beta^{-1} = -\sqrt{-1}\,\zeta_1 \dfrac{\partial}{\partial x_n}, \\ \beta \circ \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right) \circ \beta^{-1} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \quad (2 \leqq i \leqq n), \\ \beta \circ x_1 \circ \beta^{-1} = -\sqrt{-1}\,\dfrac{\partial}{\partial \zeta_1}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{-1}, \\ \beta \circ x_j \circ \beta^{-1} = x_j \quad (2 \leqq j \leqq n-1), \\ \beta \circ x_n \circ \beta^{-1} = x_n + \dfrac{\partial}{\partial \zeta_1}\zeta_1\left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{-1}. \end{cases}$$

$\tilde{\mathcal{P}} = \beta \circ \mathcal{P} \circ \beta^{-1}$ とおけば，$\tilde{\mathcal{P}}v(\zeta_1, x') = 0$ が成立する．さて，$x'' = (x_2, \cdots, x_{n-1})$ とおいて，

$$\mathcal{P} = x_1 D_1 I_m + \sum_{\alpha_1, \alpha_n \geqq 0} \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_n}(x'', D')\, x_n^{\alpha_n} x_1^{\alpha_1}$$

と展開できる．このとき，

$$\tilde{\mathcal{P}} = -D_{\zeta_1}\zeta_1 I_m + \sum_{\alpha_1, \alpha_n \geqq 0} \mathcal{P}_{\alpha_1, \alpha_n}(x'', D')$$
$$\cdot (x_n + D_{\zeta_1}\zeta_1 D_n^{-1})^{\alpha_n} (-\sqrt{-1}\,D_{\zeta_1} D_n^{-1})^{\alpha_1}$$

を得る．$\tau = \xi_1^{-1}$ とおくと，

$$\tilde{P} = (\tau D_\tau - 1) I_m + \sum_{\alpha_1, \alpha_n \geqq 0} P_{\alpha_1, \alpha_n}(x'', D') \cdot (x_n + (1 - \tau D_\tau) D_n^{-1})^{\alpha_n} (\sqrt{-1}\, \tau^2 D_\tau D_n^{-1})^{\alpha_1}.$$

ここで，

$$A' = -\sqrt{-1} \sum_{\alpha_1 \geqq 1,\ \alpha_n \geqq 0} P_{\alpha_1, \alpha_n}(x'', D') \cdot (x_n + (1 - \tau D_\tau) D_n^{-1})^{\alpha_n} (\sqrt{-1}\, \tau^2 D_\tau D_n^{-1})^{\alpha_1 - 1} D_n^{-1},$$

$$B' = -\sum_{\alpha_n \geqq 0} P_{0, \alpha_n}(x'', D') (x_n + (1 - \tau D_\tau) D_n^{-1})^{\alpha_n} + I_m$$

とおくと，

$$\tilde{P} = (I_m - A'\tau)(\tau D_\tau I_m - \sum_{i=0}^{\infty} (A'\tau)^i B')$$

が（$|\tau| \ll 1$ に対して）成立する．従って，$0 < \varepsilon \ll 1$ に対して，$0 < |\tau| < \varepsilon$ 上で，

(3) $$(\tau D_\tau I_m - \sum_{i=0}^{\infty} (A'\tau)^i B') v(\tau^{-1}, x') = 0$$

が成り立つ．A', B' は共に，高々 0 階の擬微分作用素からなる $m \times m$ 行列であるから，定理 1 により，ある 0 階の擬微分作用素の $m \times m$ 行列 $C = C(x', D')$ が存在して，$0 < |\tau| < \varepsilon \ll 1$ のとき，(3) は次の方程式系：

(4) $$(\tau D_\tau I_m - C(x', D')) w = 0$$

と同値；すなわち，(3) の解 v と (4) の解 w は，擬微分作用素の $m \times m$ 行列 R, S により，$v = Rw$, $w = Sv$ という

関係で結ばれる．さらに，$\sigma_0(C)(0,\sqrt{-1}dx_n)$ の固有値はすべて $\lambda+1$ に等しいことが上の計算からわかる．さて，(4)により，w は m 個の（$n-1$ 変数の）マイクロ函数からなる縦ベクトル $a(x')$ を用いて，

$$w = \tau^{C(x',D')}\ a(x')$$

と書けるが，v は一価であるから，$w = \mathcal{S}v$ も一価であり，従って，

$$(\exp(2\pi\sqrt{-1}\,C(x',D')) - I_m)\,a(x') = 0$$

でなければならない．今，$\lambda \notin \mathbb{Z}$ と仮定すると，これから直ちに $a=0$，従って，$v = \mathcal{R}w = 0$ を得る．すなわち，$Y(x_1)u(x) = 0$ が証明できた．同様にして，$Y(-x_1)u(x) = 0$ を示せるから，結局 $u(x) = Y(x_1)u(x) + Y(-x_1)u(x) = 0$ を得る．以上により，$\lambda_j \notin \mathbb{Z}$ $(j=1,\cdots,m)$ の場合には定理は証明された．ある λ_j が負の整数値をとる場合にはもう少し精密な考察を必要とするので，ここでは省略する．[12] の §2 を参照されたい．

<u>例</u>．$x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$，$D_j = \partial/\partial x_j$ として，

$$P = D_1(D_1 - \sqrt{-1}\,x_1D_2) + a_1(x)D_1 + a_2(x)D_2 + b(x)$$

という作用素を考えよう；ここで，a_1, a_2, b は $\mathbb{R}^2$ の開集合 U で実解析的であり，さらに $(0,x_2)\in U$ のとき，

$$a_2(0,x_2) \notin \{0, -\sqrt{-1}, -2\sqrt{-1}, \cdots\}$$

を仮定する．このとき，f が U 上定義された佐藤超函数で，Pf は U 上で実解析的，f は $\{x \in U \,;\, x_1 \neq 0\}$ 上で実解析的であるとすると，実は f は U 全体で実解析的となる．

$P = P_1 P_2 I_m + Q$ が (A.1) ～ (A.3)，(R) をみたし，さらに，$\sigma(P_2)$ は $\sqrt{-1}\, T^*\mathbb{R}^n$ 上で実数値（純虚数値）をとるとすると，定理2と柏原－Schapira [8] の Theorem 2.2.1 を組み合わせて，$Pu = 0$ のマイクロ函数解の台の分岐に関する結果を得る．x^* を通る P_2 の実陪特性帯を $b_2(x^*)$ とし，$b_j(x^*) - \{x^*\}$ の連結成分を $b_j^+(x^*)$，$b_j^-(x^*)$ と書く．以上の仮定のもとで，次を得る．

系．$\lambda_j \notin \mathbb{Z}$ $(j = 1, \cdots, m)$ を仮定する．u は x^* の近傍で定義された m 個のマイクロ函数からなる縦ベクトルで，$Pu = 0$，かつ u の台は，$b_j^+(x^*)$，$b_j^-(x^*)$ $(j = 1, 2)$ のうち少くとも2つと交わらないとすると，x^* は u の台に含まれない．

この系が適用される最も典型的な例は，最初にあげた

$$D_1^2 - x_1^2(D_2^2 + \cdots + D_n^2) + (\text{低階項})$$

という作用素である．

§3. 解析的準楕円性

$P = P_1 P_2 I_m + Q$ は §1 と同様で，$x^* \in \sqrt{-1}\, T^*\mathbb{R}^n - \mathbb{R}^n$ において，(A.1) ～ (A.3) をみたしているとする．この節

では，さらに $\sigma(P_1)$ に関する次の条件 (H) を仮定する：

(H) $\{(z,\zeta)\in T^*\mathbb{C}^n;\ \sigma(P_1)(z,\zeta)=\sigma(P_1)^c(z,\zeta)=0\}$ は $T^*\mathbb{C}^n$ のシンプレクティック部分多様体であり，また正の奇数 k と複素数 α が存在して，$F=\alpha\sigma(P_1)$ は

$$\begin{cases} (H_{(F-F^c)})^j(F+F^c)(x^*)=0 & (0\leqq j\leqq k-1), \\ (H_{(F-F^c)})^k(F+F^c)(x^*)<0, \\ dF(x^*)-dF^c(x^*)\neq 0 \end{cases}$$

をみたす。

ここで，$T^*\mathbb{C}^n$ 上の正則函数 $f=\sum_\alpha f_\alpha(z)\zeta^\alpha$ に対して，

$$f^c=\sum_\alpha \overline{f_\alpha(\bar z)}(-\zeta)^\alpha,\qquad H_f=\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta_j}\frac{\partial}{\partial z_j}-\frac{\partial f}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial\zeta_j}\right)$$

とおいた．特に，$\{\sigma(P_1),\sigma(P_1)^c\}(x^*)<0$ ならば，(H) は（$k=1$ として）みたされる．$\sqrt{-1}\,T^*\mathbb{R}^n$ 上のマイクロ函数の層を $\mathcal{C}$，その x^* 上の茎を $\mathcal{C}_{x^*}$ で表わそう．

<u>定理3</u>. 条件 (A.1) ～ (A.3) 及び (H) のもとで，準同型

$$P:\ (\mathcal{C}_{x^*})^m\longrightarrow(\mathcal{C}_{x^*})^m$$

は単射である；すなわち，P は x^* において超局所的に解析的準楕円型である．

（証明）条件 (H) により，P_1 は $(0,\sqrt{-1}\,dx_n)$ の近傍で，$D_1+\sqrt{-1}\,x_1^k D_n$ という作用素と同値になる（佐藤－河合－柏原 [14] 参照）．従って，最初から，$x^*=(0,\sqrt{-1}\,dx_n)$,

$P_1 = D_1 + \sqrt{-1}\,x_1^k D_n$ としてよい．

$$S(z,\theta) = \langle z, \theta\rangle - \sqrt{-1}\,\frac{z_1^{k+1}}{k+1}\,\theta_n$$

とおき，$(w,\theta) = \varphi(z,\zeta)$ を

$$w = \mathrm{grad}_\theta S(z,\theta), \quad \zeta = \mathrm{grad}_z S(z,\theta)$$

により定義される $T^*\mathbb{C}^n$ の複素接触変換とする．このとき，$(\varphi^{-1}(\sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^n), \mathbb{C}^X(\sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^n))$ は x^* において，Schapira [15] の意味で正値である（[15] の Théorème 2.4 参照）．

さらに，

$$L = \sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^n \cap \varphi^{-1}(\sqrt{-1}T^*\mathbb{R}^n) = \{(x, \sqrt{-1}\eta) \,;\, x_1 = 0\}$$

が成立する．Φ を φ に付随した量子化接触変換とすると，$u \in \mathcal{C}$ と擬微分作用素 A に対して，

$$A(\varphi^{-1}u) = \varphi^{-1}(\Phi^{-1}(A)u)$$

により，層 $\varphi^{-1}\mathcal{C}$ は $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}$－加群となる（$\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}$ は $T^*\mathbb{C}^n$ 上の擬微分作用素の層）．[15] の Théorème 3.2 により，

$$\Phi : \mathcal{C}|_L \longrightarrow \Gamma_L(\varphi^{-1}\mathcal{C})$$

という $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}$-加群の層準同型で単射であるものが存在する．

今，$f \in (\mathcal{C}_{x^*})^m$ が $Pf = 0$ をみたすとして，$g \in (\mathcal{C}_{x^*})^m$ を $\Phi(f) = \varphi^{-1}g$ により定義しよう．

$\sigma(\Phi^{-1}(P_1)) = \zeta_1$ であるから，$\Phi^{-1}(P)$ は $x^* = \varphi(x^*)$ において (A.1) ～ (A.3) 及び (R) をみたす．また，上の定

義から,

$$\varphi^{-1}(\Phi^{-1}(P)g) = P(\varphi^{-1}g) = P(\Phi(f)) = \Phi(Pf) = 0$$

を得る. 従って, $\Phi^{-1}(P)g = 0$ であり, かつ g の台は L に含まれる. $\Phi^{-1}(P_1)$ の x^* を通る実陪特性帯と L との共通部分は $\{x^*\}$ であるから, 定理2により, $g=0$ を得る. Φ は単射だから, これは, $f=0$ を意味する.

P が偏微分作用素で, その実特性多様体の各点で (必要なら P_1 と P_2 を入れ換えて) 条件 (A.1)〜(A.3) 及び (H) がみたされているとすると, P は通常の意味で解析的準楕円型となる. いくつか例をあげよう.

<u>例</u> $x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $D_j=\partial/\partial x_j$ として,

$$P = D_1^2 + x_1^2(D_2^2+\cdots+D_n^2) + \sum_{j=1}^{n} a_j(x)D_j + b(x)$$

という作用素を考える; ここで, a_j, b は $\mathbb{R}^n$ の開集合 U で実解析的であり, さらに, $(0,x')=(0,x_2,\cdots,x_n)\in U$, $\eta_2,\cdots,\eta_n\in\mathbb{R}$, $\eta_2^2+\cdots+\eta_n^2=1$ のとき,

$$\sum_{j=2}^{n} a_j(0,x')\eta_j \notin \{(2l+1)\sqrt{-1}\ ;\ l\in\mathbb{Z}\}$$

であるとする. このとき, P は U で解析的準楕円型となる. すなわち, f が開集合 $U'\subset U$ で定義された佐藤超函数で, Pf が U' 上で実解析的であるとすると, f 自身が U' で実解析的となる.

<u>例</u> $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ として次の作用素を考える:

$$P = (D_1 + \sqrt{-1}\, x_1^{k} D_2)(D_1^{\ell} - \sqrt{-1}\, x_1 D_2^{\ell}) + \sum_{\substack{\alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \leq \ell}} a_\alpha(x) D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ;$$

ここで，k，ℓ は正の奇数，a_α は $\mathbb{R}^2$ の開集合 U で実解析的とする．さらに，$(0, x_2) \in U$ のとき，$a_{0,\ell}(0, x_2) \notin \sqrt{-1}\,\mathbb{Z}$ と仮定する．このとき，P は U で解析的準楕円型である．

例　$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ として次の作用素を考える：

$$P = (D_1 + \sqrt{-1}\, x_1 D_2)(D_1 - \sqrt{-1}(x_1 + x_2) D_2) + a_1(x) D_1 + a_2(x) D_2 + b(x) ;$$

ここで，a_1，a_2，b は $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ の近傍で実解析的で，$a_2(0) \notin \sqrt{-1}\,\mathbb{Z}$ をみたすとする．このとき，P は 0 において解析的準楕円型となる．すなわち，f が 0 の近傍で定義された佐藤超函数であって，Pf は 0 の近傍で実解析的であるとすると，f 自身が 0 のある近傍で実解析的となる．

以上の3つの例のうち，最初の例は，本質的には（distribution の範囲では）Treves [16] の結果に含まれる（Grušin [2]，柏原－河合－大島 [6]（証明は [5] を参照）は低階項にもう少し（それぞれ相異なる）条件をつけて論じている）．しかし後の二つの例については，従来（解析的）準楕円性は調べられていなかったように思われる．最後の例は，一点のみで解析的準楕円型となる作用素の例である．

文献

[1] Alinhac, S.: Branching of singularities for a class of hyperbolic operators. Indiana Univ. Math. J. 27, 1027-1037 (1978)

[2] Grušin, V. V.: On a class of elliptic pseudodifferential operators degenerate on a submanifold. Math. USSR-Sb. 13, 155-185 (1971)

[3] Hanges, N.: Parametrices and propagation of singularities for operators with non-involutive characteristics. Indiana Univ. Math. J. 28, 87-97 (1979)

[4] Ivrii, V. Ya.: Wave fronts of solutions of certain pseudo-differential equations. Functional Anal. Appl. 10, 141-142 (1976)

[5] Kashiwara, M., Kawai, T.: Some applications of boundary value problems for elliptic systems of linear differential equations. Ann. Math. Studies No. 93, pp. 39-61, Princeton Univ. Press (1979)

[6] Kashiwara, M., Kawai, T., Oshima, T.: Structure of cohomology groups whose coefficients are microfunction solution sheaves of systems of pseudo-differential equations with multiple characteristics, I and II. Proc. Japan Acad. 50, 420-425 and 549-550 (1974)

[7] Kashiwara, M., Oshima, T.: Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems. Ann. of Math. 106, 145-200 (1977)

[8] Kashiwara, M., Schapira, P.: Micro-hyperbolic systems. Acta Math. 142, 1-55 (1979)

[9] Kataoka, K.: On the theory of Radon transformations of hyperfunctions. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 28, 331-413 (1981)

[10] Kataoka, K.: Micro-local theory of boundary value problems I. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 27, 355-399 (1980)

[11] Ôaku, T.: A canonical form of a system of microdifferential equations with non-involutory characteristics and branching of singularities. Invent. Math. (in press)

[12] Ôaku, T.: Analytic hypo-ellipticity and propagation of regularity for a system of microdifferential equations with non-involutory characteristics (to appear)

[13] Sato, M., Kawai, T., Kashiwara, M.: Microfunctions and pseudo-differential equations. Lecture Notes in Math. No. 287, pp. 265-529, Springer (1973)

[14] Sato, M., Kawai, T., Kashiwara, M.: On the structure of single pseudo-differential equations. Proc. Japan Acad. 48, 643-646 (1972)

[15] Schapira, P.: Conditions de positivité dans une variété symplectique complexe. Application à l'étude des microfonctions. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 14, 121-139 (1981)

[16] Treves, F.: Analytic hypo-ellipticity of a class of pseudodifferential operators with double characteristics and applications to the $\bar{\partial}$-Neumann problem. Comm. Partial Differential Equations 3, 475-642 (1978)